تکنیک جدید پایداری آونگ وارونه روی گاری توسط کنترل کنندهٔ فازی

محمد رحیمی[1] , محمد باقر منهاج[2]

گروه فیزیک دانشگاه امام حسین (ع)

M1rahimi@yahoo.com

چکیده :

این مقاله تکنیک جدیدی را برای پایداری آونگ وارونه توسط کنترل کنندهٔ فازی T-S ارائه می‌دهد . در این تکنیک با استفاده از کنترل کنندهٔ فازی T-S یک آونگ وارونه روی گاری را در هر زاویه اولیه در بازهٔ $-2\pi < \theta(0) < 2\pi$ را با نیروی حداکثر یک نیوتن به حالت قائم متعادل می‌کند . این کنترل کننده حتی می‌تواند آونگ وارونه روی گاری را از زاویهٔ اولیهٔ $\theta(0) = \pm\frac{\pi}{2}$ نیز به $\theta = 0$ باز گرداند . در نهایت یک شبیه سازی کامپیوتری برای اثبات این مطلب آورده شده است .

واژه های کلیدی : کنترل فازی , تاکاگی-سوگنو , آونگ وارونه , LMI .

۱- مقدمه :

روشهای مختلفی برای پایدار سازی یک آونگ وارونه روی گاری وجود دارند . از جملهٔ این روشها را می‌توان کنترل خطی ، فیدبک حالت ، کنترل غیرخطی و ... نام برد . روشهای نام برده شده از روشهای مبتنی بر مدل هستند . روشهای غیر مبتنی بر مدل مانند کنترل فازی نیز برای پایداری آونگ وارونه وجود دارند . یکی از روشهای مبتنی بر مدل ، کنترل کنندهٔ فازی T-S است . با استفاده از کنترل کنندهٔ فازی T-S می‌توان آونگ وارونه روی گاری را در هر نقطه از بازهٔ $-2\pi < \theta(0) < 2\pi$ به $\theta = 0$ متعادل کرد . این کنترل کننده و حتی دیگر کنترل کننده‌ها ، برای پایدار کردن آونگ وارونه بخصوص در حوالی $\theta(0) = \pm\frac{\pi}{2}$ نیاز به یک نیروی کنترلی بزرگ دارند [۳] و [۴] که حتی از ۱۰۰۰ نیوتن هم بیشتر است [۱] . همانطور که می‌دانیم ، اعمال این نیرو اگر غیر ممکن نباشد ، بسیار مشکل است . بنابراین باید دنبال روشی بگردیم که با نیروی کنترلی کم بتواند آونگ وارونه روی گاری را پایدار کند . یک جواب برای حل این مشکل باز هم کنترل کنندهٔ فازی T-S است که می‌تواند این مشکل را بر طرف کند . در ادامه به طراحی این کنترل کنندهٔ فازی می‌پردازیم .

---

[1]-پژوهشگر, گروه فیزیک , دانشگاه امام حسین (ع)

[2]-استاد , گروه کنترل , دانشگاه امیر کبیر

در طراحی کنترل کنندهٔ T-S ابتدا سیستم غیر خطی را با جمع چند سیستم خطی تقریب زده می‌شود[۲] . سپس با استفاده از روشهای مختلف طراحی کنترل کنندهٔ خطی می‌توان برای هریک از سیستمهای خطی شده ، یک جبران ساز طراحی کرد [۱] . ورودی فیدبک از جمع وزن دار خروجی های جبران سازهای طراحی شده بدست می‌آید .

۲- طراحی کنترل کنندهٔ فازی T-S :

برای طراحی کنترل کنندهٔ فازی T-S ابتدا باید برای سیستم غیرخطی ، یک تقریب سیستم فازی T-S پیدا کنیم . قواعد سیستم فازی چنین می‌شود :

قاعدهٔ iام :

اگر $z_1(t)$ ، M_{i1} است و ... و $z_p(t)$ ، M_{ip} است

آنگاه :

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1,2,...,r \tag{۱}$$

اینجا M_{ij} مجموعه فازی است و r تعداد قواعد مدل است ، $x(t) \in \Re^n$ بردار حالت ، $u(t) \in \Re^m$ بردار ورودی ، $A_i(t) \in \Re^{n*n}, B_i(t) \in \Re^{n*m}$ و $z_1(t),...,z_p(t)$ متغییرهای مفروض دانسته که ممکن است توابعی از حالتها باشند و یا اغتشاش خارجی و یا زمان باشند . ما از $z(t)$ بجای $z_1(t),...,z_p(t)$ استفاده خواهیم کرد . عدد سازی شدهٔ سیستم فازی T-S معادلهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\} \tag{۲}$$

که :

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), ..., z_p(t)]$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij}(z_j(t))$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}$$

برای تمام t ها ، قسمت $M_{ij}(z_j(t))$ درجه عضویت $z_j(t)$ در M_{ij} است .

از اینرو :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) > 0, \\ w_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1,2,...,r, \end{cases} \tag{۳}$$

پس واضح است که :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1, \\ h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1,2,...,r, \end{cases} \tag{۴}$$

در ادامه با استفاده از مدل فازی بدست آمده ، یک جبران ساز فازی T-S را طراحی خواهیم کرد . قسمت اگر قواعد مدل فازی و کنترل کنندهٔ فازی باهم یکی هستند . قواعد کنترل کنندهٔ فازی چنین هستند :

قاعدهٔ کنترل iام :

اگر $z_1(t)$, M_{i1} است و ... و $z_p(t)$, M_{ip} است

آنگاه : (۵)

$$u(t) = K_i x(t),\ i = 1,2,...,r$$

که $K_i \in \mathbb{R}^{m*n}$ ماتریس بهرهٔ فیدبک است . کنترل کنندهٔ نهائی چنین می‌شود :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i\left(z(t)\right) K_i x(t) \tag{۶}$$

برای حلقه بسته شدن سیستم ، معادلهٔ (۶) را رد معادلهٔ سیستم فازی T-S (۲) جایگذاری می‌کنیم . بنابراین چنین بدست می‌آوریم :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i\left(z(t)\right) h_j\left(z(t)\right)\left[\left(A_i + B_i K_j\right) x(t)\right] \tag{۷}$$

قضیهٔ : نقطهٔ تعادل سیستم (۷) پایدار مجانبی کلی است اگر یک ماتریس مثبت معین مشترک P وجود داشته باشد طوریکه نامعادلات زیر را ارضاء کند [1] :

$$K_j^T B_i^T P + P B_i K_j + A_i^T P + P A_i < 0, \qquad i, j = 1,2,...,r \tag{۸}$$

برای اینکه بتوانیم آنرا با روشهای معمول LMI حل کنیم ، تغییر متغییرهای $Y_i = K_i W, W = P^{-1}$ را انجام می‌دهیم . بنابراین با اعمال تغییر متغییرها به معادلهٔ (۸) خواهیم داشت :

$$Y_j^T B_i^T + B_i Y_j + A_i W + W A_i^T < 0,\ i, j = 1,2,...,r \tag{۹}$$

سپس با حل LMI های $W > 0$ و رابطهٔ (۹) در صورت وجود جواب می‌توان کنترل کنندهٔ پایدار را بدست آورد . با استفاده از $P = W^{-1}$ و $K_j = Y_j P$ ماتریس بهرهٔ فیدبک و ماتریس مشترک مثبت معین را بدست می‌آوریم . حال با استفاده از ماتریس های بهرهٔ فیدبک بدست آمده و رابطهٔ (۶) ، کنترل کنندهٔ فازی T-S را بدست می‌آوریم .

اکنون به این نکته باز می‌گردیم که در طراحی کنترل کننده‌های فازی می‌توان از تجربهٔ یک فرد خبره کمک گرفت . در واقع این کنترل کننده ترکیبی از یک کنترل کننده مبتنی بر مدل و نیز استفاده از هوش و تجربهٔ انسان است .

فرض می‌کنیم یک اتومبیل داریم و می‌خواهیم آنرا از یک چاله خارج کنیم و نیروی کافی برای خارج کردن آن در یک رفت و برگشت نداریم . یک انسان خبره با به نوسان درآوردن اتومبیل به عقب و جلو ، سعی می‌کند دامنهٔ نوسان را آنقدر زیاد کند که در نهایت آنرا از چاله خارج کند . در آونگ هم ما همین عمل را انجام خواهیم داد . عمل نوسانی را آنقدر تکرار می‌کنیم که $\theta(t)$ داخل بازه‌ای شود که بتواند توسط یک کنترل کنندهٔ خطی فیدبک حالت و با نیروی کنترلی حداکثر یک نیوتن آنرا پایدار کرد . کنترل کنندهٔ نهائی چنین می‌شود :

$$\begin{cases} 0 & \theta(t)\dot{\theta}(t) \geq 0, t \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{r} h_i\left(z(t)\right) u_i(t) & else \end{cases} \tag{۱۰}$$

۳- شبیه سازی :

آونگ وارونه روی گاری را در نظر بگیرید . معادلات آن چنینند[۵] :

$$\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{y}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta(\theta)}\begin{bmatrix}m+M & -mL\cos(\theta)\\ -mL\cos(\theta) & I+mL^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}mgL\sin(\theta)\\ F+mL\dot{\theta}^2\sin(\theta)-k\dot{y}\end{bmatrix}=f\left(x(t),u(t)\right)$$

$$\Delta(\theta)=\left(I+mL^2\right)(m+M)-m^2L^2\cos^2(\theta)$$

$$x_1=\theta, x_2=\dot{\theta}, x_3=y, x_4=\dot{y}, u=F$$

$$m=0.1, M=1, k=0.1, I=\frac{0.025}{3}, g=9.81, L=0.5$$

برای بدست آوردن ماتریسهای A_i و B_i از ژاکوبین استفاده می‌کنیم :

$$A_i=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_i(0)}$$

$$B_i=\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{x=x_i(0)} \qquad i=1,2,\ldots,l$$

$$a_{21}=\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}=\frac{1}{\Delta^2(\theta)}\cdot$$
$$\Big\{\Big[(m+M)\left(mgl\cos(\theta)\right)-\Big\{-\left(ml\sin(\theta)\right)\left(F+ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)-k\dot{y}\right)+\left(ml\cos(\theta)\right)\left(ml\dot{\theta}^2\cos(\theta)\right)\Big\}\Big]\Delta(\theta)$$
$$-\Big[2m^2l^2\sin(\theta)\cos(\theta)\Big\{(m+M)\left(mgl\sin(\theta)\right)-\left(ml\cos(\theta)\right)\left(F+ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)-k\dot{y}\right)\Big\}\Big]\Big\}$$

$$a_{22}=\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}=\frac{1}{\Delta(\theta)}\left(-2m^2l^2\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)$$

$$a_{23}=\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3}=0$$

$$a_{24}=\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_4}=\frac{1}{\Delta(\theta)}\left(kml\cos(\theta)\right)$$

$$a_{41}=\frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_1}=\frac{1}{\Delta^2(\theta)}\cdot$$
$$\Big\{\Big[\Big\{\left(ml\sin(\theta)\right)\left(mgl\sin(\theta)\right)-\left(ml\cos(\theta)\right)\left(mgl\cos(\theta)\right)\Big\}+\left(I+ml^2\right)\left(ml\dot{\theta}^2\cos(\theta)\right)\Big]\Delta(\theta)$$
$$-\Big[2m^2l^2\sin(\theta)\cos(\theta)\Big\{-\left(ml\cos(\theta)\right)\left(mgl\sin(\theta)\right)+\left(I+ml^2\right)\left(F+ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)-k\dot{y}\right)\Big\}\Big]\Big\}$$

$$a_{42}=\frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_2}=\frac{1}{\Delta(\theta)}\left(I+ml^2\right)\left(2ml\dot{\theta}\sin(\theta)\right)$$

$$a_{43}=\frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_3}=0$$

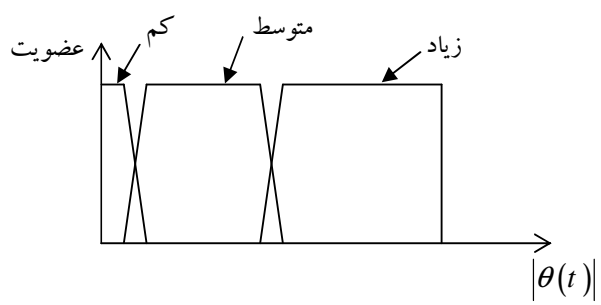
$$a_{44}=\frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4}=\frac{1}{\Delta(\theta)}(-k)\left(I+ml^2\right)$$

$$b_2=\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u}=-\frac{1}{\Delta(\theta)}\left(ml\cos(\theta)\right)$$

$$b_4 = \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial u} = -\frac{1}{\Delta(\theta)}\left(I + ml^2\right)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix}_{x=x_i(0)} \quad , B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}_{x=x_i(0)}$$

اکنون از سه قاعده برای ساختن مدل فازی استفاده می‌کنیم. $z(t) = |\theta(t)| = |x_1(t)|$ است . توابع عضویت را در شکل (۱) مشاهده می‌کنید .



شکل (۱) توابع عضویت

قواعد کنترل کنندهٔ فازی چنین می‌شود :

قاعدهٔ ۱ :

اگر $z(t)$ " کم " است ،

آنگاه : $u(t) = K_1 x(t)$

قاعدهٔ ۲ :

اگر $z(t)$ " متوسط " است ،

آنگاه : $u(t) = K_2 x(t)$

قاعدهٔ ۳ :

اگر $z(t)$ " زیاد " است ،

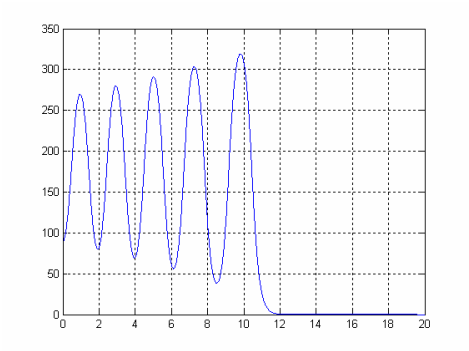
آنگاه : $u(t) = K_3 x(t)$

کنترل کنندهٔ نهائی چنین می‌شود :

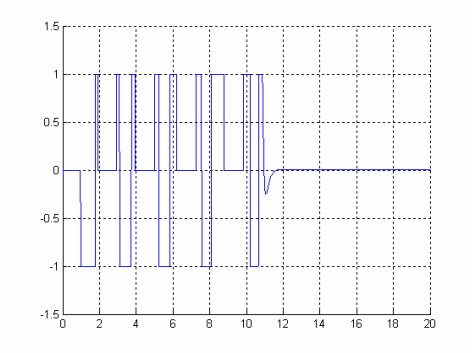
$$u(t) = \sum_{i=1}^{3} h_i\left(z(t)\right)\left(K_i x(t)\right)$$

$z(t)$ و $h_i\left(z(t)\right)$ در کنترل کننده ، دقیقاً برابر $z(t)$ و $h_i\left(z(t)\right)$ در مدل فازی می‌باشند .

نتایج شبیه سازی چنین می‌شود :



شکل (۲) زاویه آونگ بر حسب زمان



شکل (۳) ورودی کنترلی بر حسب زمان

۴- نتیجه گیری :

همانطور که در شبیه سازی ها مشاهده شد ، کنترل کنندهٔ فازی T-S طراحی شده به خوبی می‌توانست آونگ وارونه روی گاری را از هر مقدار اولیه $-2\pi < \theta(0) < 2\pi$ با نیروی حداکثر یک نیوتن پایدار کند . این نتیجه نشان می‌دهد که کنترل کنندهٔ فازی T-S به خوبی می‌تواند کنترل کنندهٔ کلاسیک را با تجربه و هوش انسانی تلفیق کند .

مراجع :

[1] K.Tanaka and H.O.Wang , Fuzzy control systems and analysis , John Wiley & Sons , (2001) .

[2] Takagi, T. and Sugeno, M., “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control,” *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics*, vol.15, pp.116-132, 1985.

[3] M. Bugeja “Non-Linear Swing-Up and Stabilizing Control of an Inverted Pendulum System ” EUROCON 2003 Ljubljana, Slovenia .

[4] F. Song and S. M. Smith “A Takagi-Sugeno Type Fuzzy Logic Controller with only 3 Rules for a 4 Dimensional Inverted Pendulum System ”

۵ – حسن خلیل , سیستمهای غیر خطی , دانشگاه تربیت مدرس ,۱۳۸۰ .
۶ – خاکی صدیق . علی , اصول کنترل مدرن , دانشگاه تهران ۱۳۸۲ .
۷ – لی وانگ , سیستمهای فازی و کنترل فازی , دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی ,۱۳۷۸ .